

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
Etapa locală – 22 februarie 2025  
Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

**Problema 1**

- a) Calculați numărul  $A = x^2 + y^2$ , știind că  $x + y = x \cdot y = 3$ .  
b) Arătați că suma numerelor  $A$  și  $B$  este un număr natural pătrat perfect, unde

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{20 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}}.$$

**BAREM:**

- a)  $x + y = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 9$  .....1p  
Deci,  $A = x^2 + y^2 = 9 - 6 = 3$ . .....1p

b)  $B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{20 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}}$

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{20 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{(5 + \sqrt{5 + \sqrt{3}})(5 - \sqrt{5 + \sqrt{3}})}$$

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{20 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{5^2 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{20 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{20 - \sqrt{3}} \dots\dots\dots 1p$$

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{(20 + \sqrt{3})(20 - \sqrt{3})}$$

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{20^2 - \sqrt{3}^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$B = \sqrt{397} \cdot \sqrt{397} = 397 \dots\dots\dots 1p$$

$$A + B = 3 + 397 = 400 = 20^2 \dots\dots\dots 1p$$

**Problema 2**

Fie triunghiul echilateral  $ABC$  și  $AD$  bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $D \in BC$ . Se prelungește segmentul  $AD$  cu un segment  $DE$  astfel încât  $AD = DE$ .

- a) Arătați că patrulaterul  $ABEC$  este romb.  
b) Dacă punctele  $M$  și  $N$  sunt simetricele punctului  $B$  față de  $AC$ , respectiv  $CE$ , demonstrați că triunghiul  $BMN$  este echilateral.

**BAREM:**

Desen corect și complet .....1p

a)  $\triangle ABC$  echilateral, ( $AD$  bisectoare  $\Rightarrow AD \perp BC$  și  $BD \equiv DC$  .....1p

în patrulaterul  $ABEC$  diagonalele se înjumătățesc  $\Rightarrow ABEC$  este paralelogram .....1p

în paralelogramul  $ABEC$  diagonalele sunt perpendiculare și diferite  $\Rightarrow$  este romb .....1p

b)  $\triangle ABC \equiv \triangle EBC$ , echilaterale  $\Rightarrow BP \equiv BQ$  mediane, înălțimi, bisectoare, unde  $\{P\} = AC \cap BM$  și  $\{Q\} = EC \cap BN \Rightarrow \sphericalangle MBN = \sphericalangle PBC + \sphericalangle CBQ = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ (1)$  .....1p

din simetrice  $\Rightarrow BP \equiv PM \equiv BQ \equiv QN \Rightarrow BM \equiv BN (2)$  .....1p

din (1), (2)  $\Rightarrow \triangle BMN$  isoscel cu un unghi de  $60^\circ \Rightarrow \triangle BMN$  echilateral .....1p

### Problema 3

Se consideră suma  $S = \frac{1}{(1+2^{-1})(1+2^2)} + \frac{1}{(1+2^{-2})(1+2^3)} + \dots + \frac{1}{(1+2^{-2024})(1+2^{2025})}$ .

Arătați că  $[2025 \cdot S] < 675$ , unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ .

(Gazeta Matematică, nr. 10/2024)

#### BAREM:

$$S = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(1+2^2)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)(1+2^3)} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^{2024}}\right)(1+2^{2025})} \dots 1p$$

$$S = \frac{1}{\left(\frac{2+1}{2}\right)(1+2^2)} + \frac{1}{\left(\frac{2^2+1}{2^2}\right)(1+2^3)} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{2^{2024}+1}{2^{2024}}\right)(1+2^{2025})} \dots 1p$$

$$S = \frac{2}{(1+2)(1+2^2)} + \frac{2^2}{(1+2^2)(1+2^3)} + \dots + \frac{2^{2024}}{(1+2^{2024})(1+2^{2025})} \dots 1p$$

$$S = \frac{5-3}{3 \cdot 5} + \frac{9-5}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{2^{2025}+1 - (2^{2024}+1)}{(1+2^{2024})(1+2^{2025})} \dots 1p$$

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{1+2^{2024}} - \frac{1}{1+2^{2025}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+2^{2025}} \dots 1p$$

$$2025 \cdot S = \frac{2025}{3} - \frac{2025}{1+2^{2025}} < \frac{2025}{3} = 675 \dots 1p$$

$$2025 \cdot S < 675 \Rightarrow [2025 \cdot S] < 675 \dots 1p$$

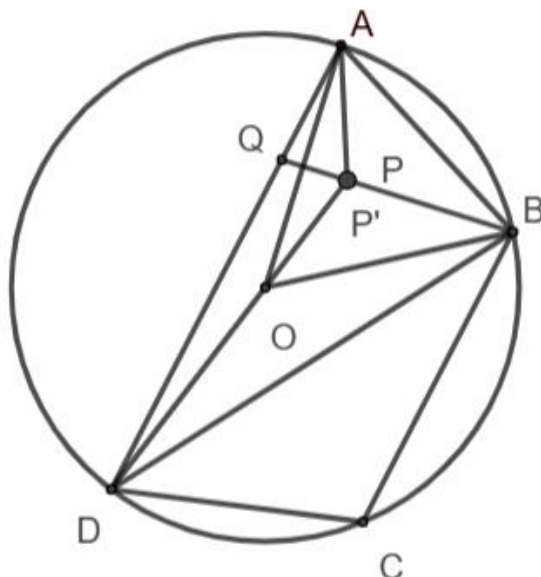
### Problema 4

Considerăm punctele  $A, B, C, D$  pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , în această ordine, astfel încât patrulaterul  $ABCD$  este trapez isoscel,  $[AB] \equiv [CD]$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $BC < AD$ . Măsura unghiului  $\sphericalangle A = 70^\circ$ , măsura unghiului  $\sphericalangle ABD = 80^\circ$ , iar punctul  $P$  este situat în interiorul triunghiului  $\triangle ABD$ , astfel încât măsura unghiului  $\sphericalangle PAD = 30^\circ$ , iar măsura unghiului  $\sphericalangle PDA = 10^\circ$ . Notăm cu  $\{Q\} = BP \cap AD$ .

a) Calculați măsura arcului mic  $\widehat{CD}$ .

b) Arătați că semidreapta  $(PQ)$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle APD$ .

**BAREM:**



- a) Cum  $\angle BAD = 70^\circ$ , obținem că  
 $\angle CBA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ . .....1p  
 Pentru că  $\angle CBA = 110^\circ$ , iar  $\angle ABD = 80^\circ$ , obținem că  $\angle CBD = 110^\circ - 80^\circ = 30^\circ$ , iar  
 de aici  $\widehat{CD} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ . .....1p
- b) În triunghiul  $\triangle ABD$ ,  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle B = 80^\circ$ , deci  $\angle ADB = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ .  
 Așadar  $\angle AOB = 60^\circ$ , deci triunghiul  $\triangle AOB$  este echilateral. ....1p  
 Triunghiul  $\triangle OAD$  este isoscel,  $\angle OAD \equiv \angle ODA = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$ , iar triunghiul  
 $\triangle OBD$  este isoscel,  $\angle ODB \equiv \angle OBD = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$ . ....1p  
 Considerăm punctul  $P'$  intersecția dintre bisectoarea unghiului  $\angle ABO$  și dreapta  $DO$ .  
 Deoarece  $\triangle ABP' \equiv \triangle OBP'$  (L.U.L.), obținem că  $\angle BAP' \equiv \angle BOP' = 2 \cdot \angle BDO = 2 \cdot 20^\circ$   
 $= 40^\circ$ , iar  $\angle AP'B \equiv \angle OP'B$ . ....1p  
 Cum  $\angle BAP' = 40^\circ$ , obținem că  $\angle P'AD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ = \angle PAD$ . Ținând cont că  
 $\angle P'DA = 10^\circ = \angle PDA$ , obținem că  $P' = P$ . ....1p  
 Cum punctele  $B, P, Q$  sunt coliniare și  $\angle APQ \equiv \angle DPQ$  (suplemente de unghiuri  
 congruente), obținem că semidreapta  $(PQ)$  este bisectoarea unghiului  $\angle APD$ . ....1p